



TITLE:

L^p -Fourier transforms for solvable Lie groups acting on Siegel domains (Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Representation Theory of Groups)

AUTHOR(S):

井上, 順子

CITATION:

井上, 順子. L^p -Fourier transforms for solvable Lie groups acting on Siegel domains (Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Representation Theory of Groups). 数理解析研究所講究録 1990, 712: 118-135

ISSUE DATE:

1990-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/101693>

RIGHT:

Fourier transforms for affine
automorphism groups on Siegel domains

九大・理 井上 順子 (Junko INOUE)

D を等質 Siegel 領域 (第 2 種) とし、その affine 自己同型群を $G(D)$ 、 $G(D)$ の単位元の連結成分を $G(D)_0$ とする。 $G(D)_0$ は、 D のある点での固定部分群を K とする時、半直積 $G(D)_0 = K \cdot G$ に分解する。ここで G は D に単純推移的に作用する、完全可解 (\mathbb{R} 上 split solvable) 群である。この G は、共役性を除いて一意に定まり、 D の岩沢群と呼ばれる (例えば [6], [10] 参照)。

本稿では 岩沢群 G を対象として、その Fourier 変換、即ち G の既約ユニタリ表現が引き起こす $L^1(G)$ の表現を調べる。 $ax+b$ 群の例 (後述) でよく知られている様に、 G の既約ユニタリ表現 π に対し、その Fourier 変換の像

$$\pi(\varphi) = \int_G \pi(g) \varphi(g) dg \quad \left(\begin{array}{l} dg \text{ は } G \text{ の左 Haar 測度} \\ \varphi \in L^1(G) \end{array} \right)$$

は必ずしもコンパクト作用素とは限らない。そこで、 $\pi(\varphi)$ が

コンパクト作用素となる φ の特徴づけを問題として取りあげる。

1. 正規 j -代数 (normal j -algebra)

等質 Siegel 領域の岩沢群の Lie 環は、Pyatetskii-Shapiro によって導入された '正規 j -代数' の概念で特徴づけられる。

定義 1. \mathfrak{g} を \mathbb{R} 上の Lie 環、 j を \mathfrak{g} の 1 次変換、 φ_0 を \mathfrak{g} 上の 1 次形式とする。組 $(\mathfrak{g}, j, \varphi_0)$ が次の条件を満足する時、正規 j -代数といわれる。

(1) \mathfrak{g} は \mathbb{R} 上完全可解 (即ち \mathfrak{g} のイデアルの減少列 $\{\mathfrak{g}_i\}$ で $\dim(\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}) = 1$ をみたすものが存在する)。

(2) $j: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ は複素構造 ($j^2 = -\text{Id}$)。

(3) j は可積分条件をみたす、即ち $\mathfrak{g}^- = \{Y + \sqrt{-1}jY; Y \in \mathfrak{g}\}$ は $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の Lie subalgebra。

(4) $\varphi_0([Y, jY]) > 0 \quad 0 \neq Y \in \mathfrak{g}$

(5) $\varphi_0([\mathfrak{g}^-, \mathfrak{g}^-]) = \{0\}$

岩沢群の Lie 環には、上の条件を満足する j, φ_0 が存在するが、逆に正規 j -代数 $(\mathfrak{g}, j, \varphi_0)$ に対し、 \mathfrak{g} を Lie 環にもつ連結かつ単連結な Lie 群は、適当な (第 2 種) Siegel 領域

上、単純推移的に作用する affine 自己同型群 として実現される。(詳しくは、[6], [10] 参照.)

そこで、以後、正規 j 代数 (\mathfrak{g}, j, f_0) (注. 単に \mathfrak{g} と略記することがある.) から出発して、対応する群 $G = \exp \mathfrak{g}$ のユニタリ表現を調べる事にする。

2. $ax+b$ 群

始めに、例として $ax+b$ 群

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}$$

を取りあげよう。 G の Lie 環

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}X + \mathbb{R}Y, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対し、1 次変換 j を $jX = -Y, jY = X$ で、1 次形式 f_0 を $f_0(X) = 0, f_0(Y) = -1$ で定めると、 (\mathfrak{g}, j, f_0) は正規 j 代数となる。

$G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ とみて G の各点 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を (b, a) と書き、 G 上の測度 $d\mu$ を $d\mu(g) = d\mu((b, a)) = a^{-2} db da$ で定めると、 $d\mu$ は G の左 Haar 測度である。(ここで db, da は Lebesgue 測度。)

さて、 G の既約ユニタリ表現の同値類全体は、以下で定め

る2つの無限次元表現 π_+ , π_- 及びユニタリ指標 χ_λ ($\lambda \in \mathbb{R}$ でパラメトライズされる) として実現される。

• π_+ , π_-

表現空間を $L^2(\mathbb{R}_+^*, \frac{dt}{t})$ (正の実数の乗法群上、Haar 測度 $\frac{dt}{t}$ に関する L^2 -関数の空間) とし、 $g=(b, a)$ の作用を

$$\pi_\pm((b, a))\xi(t) = e^{\pm i\sqrt{a}bt} \xi(at), \quad \xi = \xi(t) \in L^2(\mathbb{R}_+^*, \frac{dt}{t})$$

(複号同順)

で定める。

• χ_λ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

$$\chi_\lambda((b, a)) = a^{\sqrt{a}\lambda}.$$

次に G の2つの無限次元表現 π_+ , π_- に対して Fourier 変換 $\pi_\pm(\varphi) = \int_G \pi(g)\varphi(g) d\mu(g)$, $\varphi \in L^1(G, d\mu(g))$ を考えよう。 π_+ , π_- が共に CCR でない、即ち Fourier 変換の像 $\pi_\pm(\varphi)$ がコンパクト作用素とは限らない、という事実は、以前からよく知られており、実際 Khalil [7] は $\pi_\pm(\varphi)$ がコンパクト作用素となるための判定条件を次の形で与えた。

定理 2. (Khalil [7], Eymard et Terp [5]) G を $ax+b$ 群 π_+ , π_- は前述の通りとする。 $\varphi \in L^1(G)$ に対して、次の3つの主張は同値である。

- (a) $\pi_+(\varphi)$ はコンパクト作用素
- (b) $\pi_-(\varphi)$ はコンパクト作用素
- (c) $\int_{\mathbb{R}} \varphi(b, a) db = 0$ が殆ど全ての $a \in \mathbb{R}_+^*$ で成り立つ。

以下 一般の正規 j 代数 \mathfrak{g} に対応する Lie 群 $G = \exp \mathfrak{g}$ に対して、Khalil の結果を拡張する事を目標とする。

3. 正規 j 代数の構造

ここで 正規 j 代数の基本的構造についてまとめておく。

([6], [10], [12] 参照.)

定理 3. (Pyatetskii-Shapiro) (\mathfrak{g}, j, f_0) を正規 j 代数とする。 \mathfrak{g} 上の対称双 1 次形式 ω を $\omega(X, Y) = f_0([X, jY])$, $X, Y \in \mathfrak{g}$ で定義すると、定義 1 の (4) より ω は正定値である。 $\mathfrak{h} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の ω に関する直交補空間を \mathcal{O} とすると \mathcal{O} は 可換な部分環で \mathcal{O} の \mathfrak{h} への adjoint 作用は \mathbb{R} -diagonalizable. 即ち \mathfrak{h} はルート空間に分解する。 \mathcal{O}^* と \mathcal{O} の双対空間として、

$$\mathfrak{h} = \sum_{\alpha \in \mathcal{O}^*} \mathfrak{g}^\alpha \quad ; \quad \mathfrak{g}^\alpha = \{X \in \mathfrak{h} ; [A, X] = \alpha(A)X, A \in \mathcal{O}\}.$$

$\{\alpha_k\}_{1 \leq k \leq r}$ を $\{0\} \neq j(\mathfrak{g}^{\alpha_k}) \subset \mathcal{O}$ をみたすルートとすると、 $\dim \mathfrak{g}^{\alpha_k} = 1$, $r = \dim \mathcal{O}$. (この r を \mathfrak{g} の rank と呼ぶ)

適当に番号をつけかえれば、 $\mathfrak{g}^\alpha \neq \{0\}$ となるルートは、高々次の形のものに限る。

$$\alpha_k, \quad \frac{\alpha_k}{2} \quad (1 \leq k \leq n)$$

$$\frac{\alpha_m + \alpha_k}{2}, \quad \frac{\alpha_m - \alpha_k}{2} \quad (1 \leq k < m \leq n)$$

次に

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g} + \sum_{1 \leq k < m \leq n} \mathfrak{g}^{(\alpha_m - \alpha_k)/2}$$

$$\mathfrak{g}_{1/2} = \sum_{1 \leq k \leq n} \mathfrak{g}^{\alpha_k/2}$$

$$\mathfrak{g}_1 = \sum_{1 \leq k \leq n} \mathfrak{g}^{\alpha_k} + \sum_{1 \leq k < m \leq n} \mathfrak{g}^{(\alpha_m - \alpha_k)/2}$$

とおくと、 \mathfrak{g} はベクトル空間として直和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{1/2} \oplus \mathfrak{g}_0$

に分解し、以下が成り立つ。

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_k] \subset \mathfrak{g}_{i+k}.$$

(但し $i+k \neq 0, \frac{1}{2}, 1$ の時 $\mathfrak{g}_{i+k} = \{0\}$ とする。)

$$j \mathfrak{g}_{1/2} = \mathfrak{g}_{1/2} \quad j \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_1.$$

4. coadjoint orbit と G のユニタリ双対

正規 j 代数 \mathfrak{g} は 完全可解 Lie 環だから、対応する群 G は exponential 群 (exponential 写像が $\mathfrak{g} \rightarrow G$ の微分同型である群) であり、 G のユニタリ双対 \hat{G} は、orbit method によりパラメトライズされる。即ち、 \mathfrak{g} の双対ベクトル空間 \mathfrak{g}^* 上

G の coadjoint 作用による軌道空間を \mathfrak{g}^*/G とすると、Kirillov-Bernat 写像 $\Theta: \mathfrak{g}^*/G \rightarrow \hat{G}$ と呼ばれる全単射が定められる。

正規 \mathfrak{j} 代数 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}_0)$ の場合、 \mathfrak{g}^* は open coadjoint orbit を持つ。この open orbit について知られている基本的な事実を述べよう。まず、直和分解: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{1/2} \oplus \mathfrak{g}_0$ に於て \mathfrak{g}_1 はイデアルであり、 $G_0 = \exp \mathfrak{g}_0$ (部分環 \mathfrak{g}_0 に対応する部分群) が \mathfrak{g}_1^* 上に coadjoint 表現の制限で作用することに注意する。 \mathfrak{g} の分解に沿って、 $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}_1^* \oplus \mathfrak{g}_{1/2}^* \oplus \mathfrak{g}_0^*$ と分解しておく。

命題 4. [8], [13]. \mathfrak{g} を $\text{rank} = n$ の正規 \mathfrak{j} 代数とする。この時、 \mathfrak{g}^* は 2^n 個の open coadjoint orbit を持ち、その和集合は \mathfrak{g}^* で稠密である。各 open orbit は次の形でかける。代表元 $f \in \Omega$ をとり、 $f_1 = f|_{\mathfrak{g}_1}$ (\mathfrak{g}_1 への制限) とする。そして上で注意した \mathfrak{g}^* の分解に従って $\mathfrak{g}_i^* \subset \mathfrak{g}^*$ ($i=1, \frac{1}{2}, 0$) とみなすと

$$\Omega = G_0 \cdot f_1 + \mathfrak{g}_{1/2}^* + \mathfrak{g}_0^*.$$

注意. (1) $\alpha x + \beta y$ 群の例に於て、 $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}Y$, $\mathfrak{g}_0 = \mathbb{R}X$. $\{X, Y\}$ の双対基底を $\{X^*, Y^*\}$ とすると、 G の coadjoint orbit は、

$$\Omega_+ = \{ \ell \in \mathfrak{g}^* ; \ell(Y) > 0 \}$$

$$\Omega_- = \{ \lambda \in \mathfrak{g}^*; \quad \ell(\gamma) < 0 \}$$

$$\lambda X^* \quad (\text{各 } \lambda \in \mathbb{R} \text{ に対する一点})$$

である。Kirillov - Bernat 写像により、 Ω_+ , Ω_- , λX^* はそれぞれ前に構成した π_+ , π_- , χ_λ の同値類に対応する。

(2) $\mathfrak{ax}+\mathfrak{b}$ 群の2つの表現 π_+ , π_- は、二乗可積分表現であるが、一般の正規 \mathfrak{j} 代数の場合も、 $G = \exp \mathfrak{g}$ の二乗可積分表現全体は、open orbit に対応する既約表現の同値類全体と一致している (例えば [11] 参照)。

本稿では open orbit に対応する既約表現に対し、その Fourier 変換がコンパクト作用素となる関数の特徴づけを与える。

5. コンパクト作用素に変換される関数の特徴づけ

正規 \mathfrak{j} 代数 \mathfrak{g} に対し、 $G = \exp \mathfrak{g}$, dg を G の左 Haar 測度とする。始めに分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_0$ の可換イデアル \mathfrak{g}_1 に対して、 $G_1 = \exp \mathfrak{g}_1$ - パートの Euclidean Fourier transform を定義しておく。

定義 5. $\varphi \in L^1(G)$, dX を \mathfrak{g}_1 上の Lebesgue 測度とする。

G_1 上の Euclidean Fourier transform $\mathcal{F}_1 \varphi$ を $\lambda \in \mathfrak{g}_1^*$ 及び (殆ど

至る所の) $g \in G$ に対し

$$\overline{f}_1 \varphi(l)(g) = \int_{\mathfrak{g}_1} e^{\sqrt{-1} l(x)} \varphi((\exp X)g) dX$$

で定める。

注意 任意の $g_1 = \exp Y \in G_1$ に対し、 $\overline{f}_1 \varphi(l)(g_1 g) = e^{\sqrt{-1} l(Y)} \overline{f}_1 \varphi(l)(g)$, ($l \in \mathfrak{g}_1^*$, $g \in G$) であるから、 $dr g$ を $G_1 \backslash G$ の右 Haar 測度、 Δ_G を G の modular 関数とすると各 $l \in \mathfrak{g}_1^*$ に対し

$$|\overline{f}_1 \varphi(l)(g) \Delta_G(g)| \in L^1(G_1 \backslash G, dr g)$$

と見做せる。

以上の準備の下で次の判定条件が得られる。

定理 6. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{1/2} \oplus \mathfrak{g}_0$ を正規 \mathfrak{g} 代数、 $G = \exp \mathfrak{g}$, dg を G の左 Haar 測度とする。 Ω を open coadjoint orbit とし、これに対応する G の表現を (π, \mathcal{H}_π) とする。また一般の $l \in \mathfrak{g}^*$ に対し、orbit $G \cdot l$ に対応する既約表現を π_l で表す。そして open orbit Ω の境界を $\partial\Omega$ と記す。(即ち $\partial\Omega = \text{cl}(\Omega) \setminus \Omega$, ここで $\text{cl}(\Omega)$ は Ω の閉包。) この時、 $\varphi \in L^1(G)$ に対して、次の3つの条件は同値である。

1. $\pi(\varphi)$ は \mathcal{F}_π のコンパクト作用素である.
2. 任意の $l \in \partial\Omega$ に対し、 $\mathcal{F}_l \varphi(l_1)(g) = 0$. ここで $l_1 = l|_{\mathcal{O}_1}$.
3. 任意の $l \in \partial\Omega$ に対し、 $\pi_l(\varphi) = 0$

注意 7 (1) $ax+b$ 群の例では 2つの open orbit Ω_\pm に於て $\partial\Omega_+ = \partial\Omega_-$ である。従って定理 6 の条件 1, 2 の同値から Khalil の結果が出る。

(2) 一般の局所コンパクト群 G に対し、Arsac は G の C^* 環のスペクトルの言葉を用いて、Fourier 変換のコンパクト性に関する結果を得ている。ここで、簡単のため、可分な I 型の局所コンパクト群に対してその結果をまとめると次の通り。

定理 8. (Arsac [1]) G を可分な I 型局所コンパクト群、 $\pi \in \widehat{G}$ とする。 \widehat{G} には Fell 位相 [4, 18.1] を入れ、 $\{\pi\}$ の閉包を $\overline{\{\pi\}}$ で表す。(即ち $\sigma \in \overline{\{\pi\}} \iff \sigma$ is weakly contained in $\{\pi\}$) この時、 $\varphi \in L^1(G)$ に対し、 $\pi(\varphi)$ がコンパクト作用素であるための必要十分条件は、すべての $\sigma \in (\overline{\{\pi\}} \setminus \{\pi\})$ に対し $\sigma(\varphi) = 0$ を満たす事である。

さて G を exponential 群とすれば、前述した様に Kirillov -

Bernat 写像 $\Theta: \mathfrak{g}^*/G \rightarrow \hat{G}$ は全単射である。更に、 \mathfrak{g}^*/G に商空間としての位相を入れ、 \hat{G} に Fell 位相を入れると、 Θ は連続である事が知られている [9]。従って、coadjoint orbit $O \in \mathfrak{g}^*/G$ に対して、その境界 (商空間 \mathfrak{g}^*/G の位相で) を ∂O で表すと $\Theta(\partial O) \subset \overline{\{\Theta(O)\}} \setminus \Theta(O)$ であり、定理 6 の条件 1 に Anzac の結果を用いて条件 3 が出る。

しかし、一般にこの逆、即ち Θ^{-1} が連続かどうかは まだ未解決の問題である。

例 (2 次の Siegel 上半平面)

6 次元の Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathbb{R} - \text{span} \{X_1, X_2, W, Z, Y_1, Y_2\}$ を

自明でない括弧積

$$\begin{aligned} [X_1, W] &= -\frac{1}{2}W, & [X_1, Z] &= \frac{1}{2}Z, & [X_1, Y_1] &= Y_1, \\ [X_2, W] &= \frac{1}{2}W, & [X_2, Z] &= \frac{1}{2}Z, & [X_2, Y_2] &= Y_2, \\ [W, Z] &= Y_2, & [W, Y_1] &= Z \end{aligned}$$

として定義する。 \mathfrak{g} 上の一次変換 $j \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ を $jX_k = -Y_k, jW = -Z, jZ = W, jY_k = X_k$ ($k=1,2$) で定め、一次形式 f_0 を

$f_0(Y_1) = f_0(Y_2) = -1, f_0(W) = f_0(Z) = f_0(X_1) = f_0(X_2) = 0$ で定めると

(\mathfrak{g}, j, f_0) は正規 j 代数である。(これは 2 次の Siegel 上半平面に対応するものである。) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_0$ (定理 3),

$\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R} - \text{span} \{Y_1, Y_2, Z\}, \mathfrak{g}_0 = \mathbb{R} - \text{span} \{X_1, X_2, W\}$ に分解し

\mathcal{Q}^* は 4 個の open coadjoint orbit Ω_i ($i=1,2,3,4$) を持つ。これらは \mathcal{Q}^* 上の多項式 P_1, P_2 :

$$P_1(l) = l(Y_1)l(Y_2) - \frac{1}{2}l(Z)^2$$

$$P_2(l) = l(Y_2) \quad l \in \mathcal{Q}^*$$

の零点を除いた集合の連結成分である。

$$\Omega_1 = \{ l \in \mathcal{Q}^*; P_1(l) > 0, P_2(l) > 0 \}$$

$$\Omega_2 = \{ l \in \mathcal{Q}^*; P_1(l) < 0, P_2(l) > 0 \}$$

$$\Omega_3 = \{ l \in \mathcal{Q}^*; P_1(l) > 0, P_2(l) < 0 \}$$

$$\Omega_4 = \{ l \in \mathcal{Q}^*; P_1(l) < 0, P_2(l) < 0 \}.$$

$p: \mathcal{Q}^* \rightarrow \mathcal{Q}_1^*$ を \mathcal{Q}_1 上への制限で定義される射影とし、 $\{Y_1^*, Y_2^*, Z^*\}$ を $\{Y_1, Y_2, Z\}$ に対する \mathcal{Q}_1^* の双対基底とする。この時

$$p(\partial\Omega_1) = \{ l \in \mathcal{Q}_1^*; P_1(l) = 0, P_2(l) \geq 0 \}$$

$$\text{即ち } \gamma S_+(\theta) = \gamma((Y_1^* + Y_2^*) + \cos\theta(Y_1^* - Y_2^*) + \sqrt{2}\sin\theta Z^*)$$

$\gamma \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ で定められる cone.

$$p(\partial\Omega_2) = p(\partial\Omega_1) \cup Y_2^\perp \quad \text{但し } Y_2^\perp = \{ l \in \mathcal{Q}_1^*; l(Y_2) = 0 \}.$$

$$p(\partial\Omega_3) = \{ l \in \mathcal{Q}_1^*; P_1(l) = 0, P_2(l) \leq 0 \}$$

$$\text{即ち } \gamma S_-(\theta) = \gamma(-(Y_1^* + Y_2^*) + \cos\theta(Y_1^* - Y_2^*) + \sqrt{2}\sin\theta Z^*)$$

$\gamma \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ で定められる cone.

$$p(\partial\Omega_4) = p(\partial\Omega_3) \cup Y_2^\perp.$$

Ω_i に対応する G の既約表現を π_i ($i=1,2,3,4$) として

$$\mathcal{J}(\pi_i) = \{ \varphi \in L^1(G); \pi_i(\varphi) \text{ はコンパクト作用素} \}$$

とすると、定理6から

$$\mathcal{J}(\pi_1) \not\supset \mathcal{J}(\pi_2), \quad \mathcal{J}(\pi_3) \not\supset \mathcal{J}(\pi_4)$$

が成り立つ。

定理6の証明の方針。

注意7.(2)で既に説明した様に条件1から条件3が出る事は分っているから、条件2と条件3が同値である事、及び条件2から条件1が出る事を示せば、定理は証明できる。ここでは、その証明の方針のみを述べておくことにする。

始めに Kirillov - Bernat 対応に基づいた、既約表現の構成法を簡単にまとめておこう。

G を exponential Lie 群、 \mathfrak{g} をその Lie 環とする。coadjoint orbit Ω に対し、代表元 $\mathfrak{f} \in \Omega$ を任意にとる。この時、以下の条件(1), (2) (3)をみたす部分環 $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_{\mathfrak{f}}$ が存在する。

$$(1) \mathfrak{f}([\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]) = \{0\}$$

(2) \mathfrak{b} は(1)をみたす部分環の中で最大の次元を持つ。(このような \mathfrak{b} を \mathfrak{f} における real polarization という.)

(3) affine 空間 $\mathfrak{b}^{\perp} + \mathfrak{f}$ は Ω に含まれる。ここで $\mathfrak{b}^{\perp} = \{ \mathfrak{l} \in \mathfrak{g}^*; \mathfrak{l}|_{\mathfrak{b}} = 0 \}$. ((3) を Pukanszky condition という.)

$\pi = \pi(f, \tau)$ を、 $B = \exp \tau$ のユタリ指標、 $\chi_f(\exp X) = e^{\sqrt{-1}f(X)}$

($X \in \tau$) から誘導された、 G のユタリ表現としよう。この時、 π は既約で、その同値類は代表元 f 及び polarization τ の選び方に依らない。従って対応 $f \mapsto \pi(f, \tau)$ から写像 $\Theta: \mathfrak{g}^*/G \rightarrow \hat{G}$ が引き起こされるが、これが前述の Kirillov-Bernat 写像である。

定理 6 の証明に移ろう。以後、記号は定理 6 で述べた通りとする。まず、前述の方法に従って、 $\ell \in \mathfrak{g}^*$ に於て $G \cdot \ell$ に対応する表現 π_ℓ を構成する。ここで Pukanszky condition をみたす real polarization τ_ℓ は \mathfrak{g}_1 を含む様にとれる。そこで π_ℓ を $\text{ind}_{B_\ell}^G \chi_\ell$ ($B_\ell = \exp \tau_\ell$) として、 G 上の関数 ζ で

$$\zeta(bg) = \chi_\ell(b) \left(\frac{\Delta_{B_\ell}(b)}{\Delta_G(b)} \right)^{\frac{1}{2}} \zeta(g) \quad b \in B_\ell, g \in G$$

(ここで $\Delta_{B_\ell}, \Delta_G$ はそれぞれ B_ℓ, G の modular 関数) をみたすものから成る、ある Hilbert 空間 \mathcal{H}_{π_ℓ} 上に 右移動で実現する $[Z, \text{Ch } V]$ 。この時、 $G_1 \subset B_\ell$ だから $g_1 \in G_1$ の作用は

$$(\pi_\ell(g_1)\zeta)(x) = \chi_\ell(xg_1x^{-1})\zeta(x), \quad \zeta \in \mathcal{H}_{\pi_\ell} \quad x \in G$$

であることに注意する。

$G_1 \backslash G$ の global section s をとって、 $G = G_1 \times (G_1 \backslash G)$ と同一視

し、 $G_1 \backslash G$ 上の右 Haar 測度 $d\dot{g}$ を $\Delta_G^{-1}(g)dg = dX d\dot{g}$ (但し $g = (\exp X)\delta(\dot{g})$, $X \in \mathfrak{g}_1$, $\dot{g} \in G_1 \backslash G$, dX は \mathfrak{g}_1 上の Lebesgue 測度) を満足する様にとっておく。

この時、 $\varphi \in L^1(G)$ に対して、 $\pi_2(\varphi)$ は (殆ど全ての $x \in G$ で)

$$(\pi_2(\varphi)\xi)(x) = \int_{G_1 \backslash G} \overline{f_1 \varphi}(x^{-1} \cdot l_1)(\delta(\dot{g}))(\pi_2(\delta(\dot{g}))\xi)(x) \Delta_G(\delta(\dot{g})) d\dot{g}$$

である事に注意すれば、条件 2 から条件 3 が出る事が分る。

次に条件 3 を仮定しよう。 $\ell \in \partial\Omega$ に対し、 G_1 のユニタリ指標 $\chi_\ell(\exp X) = e^{\sqrt{-1}\ell(X)}$ ($X \in \mathfrak{g}_1$) からの誘導表現 $\tau = \text{ind}_{G_1}^G \chi_\ell$ を考える。 τ は affine 空間 $\mathfrak{g}_1^\perp + \ell$ と交わる coadjoint orbit に対応する既約表現の直積分に分解する。(例えば [3] 参照) 一方、命題 4 から $\Omega + \mathfrak{g}_1^\perp = \Omega$. 従って $\partial\Omega + \mathfrak{g}_1^\perp = \partial\Omega$ であり、 τ の既約分解に現れる既約表現は全て $\partial\Omega$ に含まれるものである。故に仮定から $\tau(\varphi) = 0$.

今 τ を $L^2(G_1 \backslash G, d\dot{g})$ に右移動を経由して実現すると、任意の $\psi \in L^2(G_1 \backslash G, d\dot{g})$ に対し、殆ど全ての $\dot{x} \in G_1 \backslash G$ に於て

$$\begin{aligned} (\tau(\varphi)\psi)(\dot{x}) &= \int_{G_1 \backslash G} \overline{f_1 \varphi}(\dot{x}^{-1} \cdot l_1)(\delta(\dot{g}))(\tau(\delta(\dot{g}))\psi)(\dot{x}) \Delta_G(\delta(\dot{g})) d\dot{g} \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。これから条件 2 が導かれる。

最後に、条件2から条件1を示す方針を述べる。まず、 Ω が open orbit である事から、 $f \in \Omega$ に於ける real polarization b_f で Pukanszky condition をみたすものは $\mathfrak{g}_1 \subset b_f \subset \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_{1/2}$ をみたす様にとれることが分る。 $\pi = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_{1/2}$, $N = \exp \pi$ とおくと、 $G = NG_0$ である。ここで $\sigma = \text{ind}_{B_f}^N \chi_f$, σ の表現空間を \mathcal{H}_σ とすれば、 π は、 N の表現 σ からの誘導表現 $\text{ind}_N^G \sigma$ として実現できる。 G_0 の右 Haar 測度 dg_0 をとり、 dg_0 に関して、 G_0 上 \mathcal{H}_σ -値の L^2 -関数の空間: $L^2(G_0, \mathcal{H}_\sigma, dg_0)$ に右からの作用で π を実現しよう。

さて、 G 上の関数 β で、 $\beta = \beta_N \cdot \beta_0 \in C_c(N) \otimes C_c(G_0)$ (コンパクト台をもつ連続関数の積) であるもの、及び $\chi \in C_c(G_0)$ を任意にとる。一般に $\pi(\beta)$ はコンパクト作用素ではないが、 χ による積と合成して得られる作用素 $\chi \cdot \pi(\varphi)$, 即ち、 $(\chi \cdot \pi(\varphi) \xi)(x_0) = \chi(x_0) (\pi(\varphi) \xi)(x_0)$, $\xi \in L^2(G_0, \mathcal{H}_\sigma, dg_0)$, は、コンパクト作用素である事が分る。

条件2をみたす φ の Fourier 変換 $\pi(\varphi)$ に対して、上の β と χ を適当にとれば、(作用素 norm に関して) $\pi(\varphi)$ に収束するコンパクト作用素の列: $\{\chi_i \cdot \pi(\beta_i)\}_{i,k}$ を作る事ができる。

References

1. G. Arzac, Opérateurs compacts dans l'espace d'une représentation, C. R. Acad. Sc. Paris, 286 (1978), 687-689.
2. P. Bernat et al., "Représentations des Groupes de Lie Résolubles," Dunod, Paris, 1972.
3. I. K. Busyatskaya, Representations of exponential Lie groups, Functional Anal. Appl. 7 (1973), 151-152.
4. J. Dixmier, " C^* -Algebras," North-Holland, 1982.
5. P. Eymard et M. Terp, La transformation de Fourier et son inverse sur le groupe des $ax+b$ d'un corps local, Lecture Notes in Math. 739, Springer, 1979, 207-248.
6. S. Kaneyuki, "Homogeneous Bounded Domains and Siegel Domains," Lecture Notes in Math. 241, Springer, 1971.
7. I. Khalil, Sur l'analyse harmonique du groupe affine de la droite, Studia Mathematica 51 (1974), 140-166.
8. T. Nomura, Harmonic analysis on a nilpotent Lie group and representations of a solvable Lie group on \mathfrak{D}_b cohomology spaces, Japan. J. Math. 13 (1987), 277-332.
9. L. Pukanszky, On unitary representations of exponential groups, J. Funct. Anal. 2 (1968), 73-113.
10. I. I. Pyatetskii-Shapiro, "Automorphic Functions and the Geometry of Classical Groups," Gordon and Breach, New York, 1969.
11. J. Rosenberg, Square-integrable factor representations of locally compact groups, Trans. Amer. Math. Soc. 237 (1978), 1-33.
12. H. Rossi, "Lectures on Representations of Groups of

Holomorphic Transformations of Siegel Domains," Lecture note, Brandeis University, 1972.

13. H. Rossi et M. Vergne, Équations de Cauchy-Riemann tangentielles associées à un domaine de Siegel, Ann. Sci. École Norm. Sup. 9 (1976), 31-80.